Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño

INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA

ETAPA BÁSICA

TAREAS

13180 CÁLCULO AVANZADO

Prof. E. Efren García G.

Ensenada, B.C. México 2016

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA
TAREA I - CÁLCULO AVANZADO-
Dr. E. Efren García Guerrero.

1. Encuentre una ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas para la línea:

   (a) La línea que pasa por el punto $(6, -5, 2)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (1, 3, -\frac{2}{3})$.

   (b) La línea que pasa por el punto $(2, 2.4, 3.5)$ y es paralela al vector $\vec{w} = (3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k})$.

2. ¿La línea que pasa por $(-4, -6, 1)$ y $(-2, 0, -3)$ es paralela a la línea que pasa por $(10, 18, 4)$ y $(5, 3, 14)$?

3. ¿La línea que pasa por $(4, 1, -1)$ y $(2, 5, 3)$ es perpendicular a la línea que pasa por $(-3, 2, 0)$ y $(5, 1, 4)$?

4. Determine si las líneas L_1 y L_2 son paralelas, oblicuas o se cortan. Si se cortan, determine el punto de intersección.

   (a) $L_1: \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$

   $L_2: \quad \frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{2}$

   (b) $L_1: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$

   $L_2: \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+2}{3}$

   (c) $L_1: \quad x = -6t, \quad y = 1 + 9t, \quad z = -3t$

   $L_2: \quad x = 1 + 2s, \quad y = 4 - 3s, \quad z = s$

5. ¿Cuáles de las siguientes líneas son paralelas? ¿Algunas de ellas son idénticas?

   $L_1: \quad x = 1 + t, \quad y = t, \quad z = 2 - 5t$

   $L_2: \quad x + 1 = y - 2 = 1 - z$

   $L_3: \quad x = 1 + t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t$

   $L_4: \quad \vec{r} = (2, 1, -3) + t(2, 2, -10)$

6. Encuentre el punto en el que se cortan las líneas dadas:

   $L_1: \quad \vec{r} = (1,1,0) + t(1,-1,2)$

   $L_2: \quad \vec{r} = (2,0,2) + s(-1,1,0)$

7. Obtenga una ecuación vectorial para el segmento de recta de $(2,-1,4)$ a $(4,6,1)$.

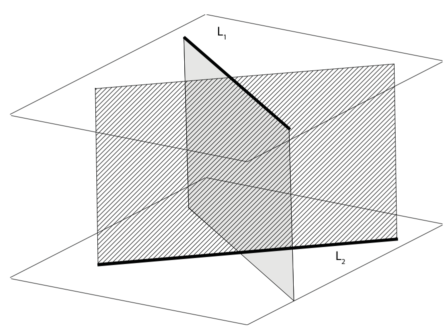
8. Describa la curva que define la siguiente función vectorial: $\vec{r} = (1+t, 2+5t, -1+6t)$.

9. Trace la curva cuya ecuación vectorial es: $\vec{r} = \cos(t)\,\hat{\imath} + \sin(t)\,\hat{\jmath} + t\,\hat{k}$.

10. Demuestre que la curva cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = t^2$, $y = 1-3t$, $z = 1+t^3$ pasa por los puntos $(1,4,0)$ y $(9,-8,28)$, pero no por el punto $(4,7,-6)$.

11. **Investigue y estudie la fórmula para encontrar: *i*) la distancia de un punto a una línea recta y *ii*) la distancia de un punto a un plano**.

    • En este ejercicio se presenta un tercer problema de distancias, la distancia de dos rectas que se cruzan. Dos rectas en el espacio se *cruzan* (como L_1 y L_2) si no son paralelas ni se cortan en algún punto (ver la figura anexa).

    (a) Encuentre la distancia entre las siguientes dos rectas en el espacio.
    $L1: x = 4+5t, y = 5+5t, z = 1-4t$
    $L2: x = 4+s, y = -6+8s, z = 7-3s$
    Siga el siguiente procedimiento:

    i) Mostrar que estas rectas no son paralelas.

    ii) Mostrar que estas rectas no se cortan, y por consiguiente las rectas se cruza.

    iii) Mostrar que las dos rectas están en planos paralelos.

    iv) Hallar la distancia entre los planos paralelos del apartado *iii)*, lo que corresponde a encontrar la distancia entre las rectas que se cruzan.

12. Encontrar la distancia entre las rectas.
    $L1: x = 2t, y = 4t, z = 6t$
    $L2: x = 1-s, y = 4+s, z = -1+s$

13. Encontrar la distancia entre las rectas.
$L1 : x = 3t, y = 2 - t, z = -1 + t$
$L2 : x = 1 + 4s, y = -2 + s, z = -3 - 3s$

14. Desarrollar una fórmula para encontrar la distancia de las rectas que se cruzan.
$L1 : x = x_1 + a_1 t, y = y_1 + b_1 t, z = z_1 + c_1 t$
$L2 : x = x_2 + a_2 s, y = y_2 + b_2 s, z = z_2 + c_2 s$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
CAMPUS ENSENADA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA
TAREA II - CÁLCULO AVANZADO -
Dr. E. Efren García Guerrero.

1. Encuentre una ecuación del plano:

   (a) Que pasa por el punto $(6, 3, 2)$ y es perpendicular al vector $(-2, 1, 5)$.

   (b) Que pasa por el punto $(-2, 8, 10)$ y es perpendicular a la línea $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 4 - 3t$.

   (c) Que pasa por el origen y es paralelo al plano $2x - y + 3z = 1$.

   (d) Que contiene la línea $x = 3+2t$, $y = t$, $z = 8-t$ y es paralelo al plano $2x+4y+8z = 17$.

   (e) Que pasa por el origen y los puntos $(2, -4, 6)$ y $(5, 1, 3)$.

   (f) Que pasa por el punto $(-1, 2, 1)$ y contiene la línea de intersección de los planos $x + y - z = 2$ y $2x - y + 3z = 1$.

---

2. Encuentre el punto en el que la línea corta al plano dado:

   (a) $x = 3 - t$, $y = 2 + t$, $z = 5t$; $\quad x - y + 2z = 9$

   (b) $x = 1 + 2t$, $y = 4t$, $z = 2 - 3t$; $\quad x + 2y - z + 1 = 0$

---

3. Determine si los planos son paralelos, perpendiculares o ninguno. Si no son paralelos ni perpendiculares encuentre el ángulo entre ellos:

   (a) $x + 4y - 3z = 1$, $-3x + 6y + 7z = 0$

   (b) $2z = 4y - x$, $3x - 12y + 6z = 1$

   (c) $x = 4y - 2z$, $8y = 1 + 2x + 4z$

---

4. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la línea que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ que es paralela al plano $x + y + z = 2$ y perpendicular a la línea $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

5. Encuentre el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 y luego encuentre el plano que contiene a dichas rectas.
   $L_1 : \quad x = t \quad , y = -t + 2 \quad , z = t + 1.$
   $L_2 : \quad x = 2s + 2 \quad , y = s + 3 \quad , z = 5s + 6$

6. Encuentre dos planos diferentes cuya intersección sea la recta
   $L : \quad x = 1 + t \quad , y = 2 - t \quad , z = 3 + 2t.$
   Escriba la ecuación para cada plano en la forma $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$.

7. Demuestre que la recta en que los planos $\Omega_1 : x + 2y - 2z = 5$ y $\Omega_2 : 5x - 2y - z = 0$ se intersecan es paralela a la recta $L : \quad x = -3 + 2t \quad , y = 3t \quad , z = 1 + 4t$.

8. Encuentre el vector del origen al punto de intersección de las medianas del triángulo cuyos vertices son: $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 3)$ y $C(-1, 2, -1))$. Después, encuentre la ecuación del plano definido por dichos vertices.

9. Sea la función vectorial $\vec{r}(t)$ la posición de una partícula en el plano xy. Encuentre: $i)$ una ecuación en x e y cuya gráfica sea la trayectoria de la partícula, $ii)$ la gráfica la trayectoria y $iii)$ los vectores velocidad y aceleración en el tiempo dado.

   (a) $\vec{r}(t) = (t + 1)\,\hat{\imath} + (t^2 - 1)\,\hat{\jmath}; \quad t = 1.$
   (b) $\vec{r}(t) = (t^2 + 1)\,\hat{\imath} + (2t - 1)\,\hat{\jmath}; \quad t = 1/2.$
   (c) $\vec{r}(t) = e^t\,\hat{\imath} + \frac{2}{9}e^{2t}\,\hat{\jmath}; \quad t = \ln 3.$
   (d) $\vec{r}(t) = (\cos 2t)\,\hat{\imath} + (2 \sin 2t)\,\hat{\jmath}; \quad t = 0.$

10. En los siguientes ejercicios se dan los vectores de posición de partículas que se mueven a lo largo de varias curvas en el plano xy. En cada caso encuentre los vectores velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$ de la partícula en los tiempos estipulados y trácelos como vectores sobre la curva.

    (a) Movimiento sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$
    $\vec{r}(t) = (\sin t)\,\hat{\imath} + (\cos t)\,\hat{\jmath}; \quad t = \pi/4 \quad \text{y} \quad \pi/2.$
    (b) Movimiento sobre el círculo $x^2 + y^2 = 16$
    $\vec{r}(t) = (4\,\cos \frac{t}{2})\,\hat{\imath} + (4\,\sin \frac{t}{2})\,\hat{\jmath}; \quad t = \pi \quad \text{y} \quad 3\pi/2.$
    (c) Movimiento sobre la cicliode $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$
    $\vec{r}(t) = (t - \sin t)\,\hat{\imath} + (1 - \cos t)\,\hat{\jmath}; \quad t = \pi \quad \text{y} \quad 3\pi/2.$
    (d) Movimiento sobre la parábola $y = x^2 + 1$
    $\vec{r}(t) = t\,\hat{\imath} + (t^2 + 1)\,\hat{\jmath}; \quad t = -1,\ 0,\ \text{y}1.$

- En los problemas, mostrar su procedimiento matemático y las gráficas correspondientes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

CAMPUS ENSENADA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA
TAREA III - CÁLCULO AVANZADO -

Dr. E. Efren García G.

Sistemas de coordenadas: Cartesiano, Cilíndrico y Esférico

1. Exprese los puntos siguientes en coordenadas cartesianas:
   (a) $P(1, 60^0, 2)$
   (b) $Q(2, 90^0, -4)$
   (c) $R(3, 45^0, 210^0)$
   (d) $T(4, \pi/2, \pi/6)$
2. Exprese los puntos siguientes en coordenadas cilíndricas y esféricas:
   (a) $P(1, -4, -3)$
   (b) $Q(3, 0, 5)$
   (c) $R(-2, 6, 0)$
3. (a) Si $V = xz - xy + yz$, exprese V en coordenadas cilíndricas.
   (b) Si $U = x^2 - 2y^2 + 3z^2$, exprese U en coordenadas esféficas.
4. Transforme los vectores siguientes en coordenadas cilíndricas y esféricas:
   (a) $\vec{D} = (x + z)\hat{a}_y$
   (b) $\vec{E} = (y^2 - x^2)\hat{a}_x + xyz\hat{a}_y + (x^2 - z^2)\hat{a}_z$
5. Convierta los vectores siguientes a los sistemas cilíndrico y esférico:
   (a) $\vec{F} = \frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + 4\hat{a}_x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
   (b) $\vec{G} = (x^2 + y^2)\left[\frac{x\hat{a}_x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y\hat{a}_y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z\hat{a}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$
6. Exprese los vectores siguientes en coordenadas cartesianas:
   (a) $\vec{A} = \rho(z^2 + 1)\hat{a}_\rho - \rho z \cos\phi \hat{a}_\phi$
   (b) $\vec{B} = 2r\sin\theta\cos\phi\hat{a}_r + r\cos\theta\cos\theta\hat{a}_\theta - r\sin\phi\hat{a}_\phi$
   (c) $\vec{C} = z\sin\phi\hat{a}_\rho - \rho\cos\phi\hat{a}_\phi + 2\rho z\hat{a}_z$
   (d) $\vec{D} = \frac{\sin\theta}{r^2}\hat{a}_r + \frac{\cos\theta}{r^2}\hat{a}_\theta$

7. Compruebe lo siguiente:

   (a) $\hat{a}_x \cdot \hat{a}_\rho = \cos\phi$
   $\hat{a}_x \cdot \hat{a}_\phi = -\sin\phi$
   $\hat{a}_y \cdot \hat{a}_\rho = \sin\phi$
   $\hat{a}_y \cdot \hat{a}_\phi = \cos\phi$

   (b) $\hat{a}_x \cdot \hat{a}_r = \sin\theta\cos\phi$
   $\hat{a}_x \cdot \hat{a}_\theta = \cos\theta\cos\phi$
   $\hat{a}_y \cdot \hat{a}_r = \sin\theta\sin\phi$
   $\hat{a}_y \cdot \hat{a}_\theta = \cos\theta\sin\phi$
   $\hat{a}_z \cdot \hat{a}_r = \cos\theta$
   $\hat{a}_z \cdot \hat{a}_\theta = -\sin\theta$

8. (a) Exprese el campo vectorial $\vec{H} = xy^2z\hat{a}_x + x^2yz\hat{a}_y + xyz^2\hat{a}_z$ en coordenadas cilíndricas y esféricas.

   (b) Determine $\vec{H}$ en $(3, -4, 5)$ en coordenadas tanto cilíndricas como esféricas.

9. Sea $\vec{A} = \rho\cos\phi\hat{a}_\rho + \rho z^2\sin\phi\hat{a}_z$.

   (a) Transforme $\vec{A}$ a coordenadas rectangulares y calcule su magnitud en el punto $(3, -4, 0)$.

   (b) Transforme $\vec{A}$ al sistema esférico y calcule su magnitud en el punto $(3, -4, 0)$.

10. Calcule la distancia entre los pares de números siguientes:

    (a) $(2, 1, 5)$ y $(6, -1, 2)$

    (b) $(3, \pi/2, -1)$ y $(5, 3\pi/2, 5)$

    (c) $(10, \pi/4, 3\pi/4)$ y $(5, \pi/6, 7\pi/4)$

11. Dado el punto $P(-2, 6, 3)$ y el vector $\vec{A} = y\hat{a}_x + (x+z)\hat{a}_y$, exprese P y $\vec{A}$ en coordenadas cilíndricas y esféricas. Evalúe $\vec{A}$ en P en los sistemas cartesiano, ciíndrico y esférico.

12. Convierta los puntos $P(1, 3, 5), T(0, -4, 3)$ y $S(-3, -4, -10)$ de coordenadas cartesianas a cilíndricas y esféricas.

13. Transforme el vector $\vec{Q} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}\,\hat{a}_x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \dfrac{yz\,\hat{a}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ a coordenadas cilíndricas y esféricas.

14. Evalue $\vec{Q}$ del inciso anterior en $T(0, -4, 3)$ en los tres sistemas de coordenadas.

15. Exprese el vector $\vec{B} = \frac{10}{r}\hat{a}_r + r\cos\theta\,\hat{a}_\theta + \hat{a}_\phi$ en coordenadas cartesianas y cilíndricas. Halle $\vec{B}(-3, 4, 0)$ y $\vec{B}(5, \frac{\pi}{2}, -2)$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

CAMPUS ENSENADA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA
TAREA IV - CÁLCULO AVANZADO -

Dr. E. Efren García G.

Cilindros y Superficies Cuadráticas

1. Bosqueje las gráficas de las siguientes superficies:

   (a) $z = x^2$

   (b) $x^2 + y^2 = 1$

   (c) $y^2 + z^2 = 1$

   (d) $x = z^2$

2. (a) ¿Qué representa la ecuación $y = x^2$ como una curva en $\Re^2$?

   (b) ¿Qué representa como una superficie en $\Re^3$?

3. (a) Bosqueje la gráfica de $y = e^x$ como una curva en $\Re^2$.

   (b) Bosqueje la gráfica de $y = e^x$ como una superficie en $\Re^3$.

   (c) Describa y bosqueje la superficie $z = e^y$.

4. Describa y bosqueje la superficie:

   (a) $y^2 + 4z^2 = 4$

   (b) $z = 4 - x^2$

   (c) $x - y^2 = 0$

   (d) $yz = 4$

   (e) $z = \cos x$

   (f) $x^2 - y^2 = 1$

   (g) $x = y^2 + 4z^2$

   (h) $x^2 = y^2 + 4z^2$

   (i) $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$

5. Bosqueje la región acotada por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \leq z \leq 2$.

6. Bosqueje la región acotada por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.

7. (a) Encuentre una ecuación de la esfera que pasa por el punto $(6, -2, 3)$ y tiene centro $(-1, 2, 1)$.

(b) Encuentre la curva en la que esta esfera cruza el plano yz.

(c) Encuentre el centro y el radio de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 6z + 1 = 0$.

8. Dibuje la región cortada en el primer cuadrante por la curva $\rho = 2(2 - \sin 2\theta)^{1/2}$.

9. Dibuje la región que se encuentra dentro de la cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$ y fuera del círculo $\rho = 1$.

10. Dibuje la región común a los interiores de las cardioides $\rho = 1 + \cos\theta$ y $\rho = 1 - \cos\theta$.

11. Dibuje el volumen de la porción de la esfera sólida $r \leq a$ que se encuentra entre los conos $\theta = \pi/3$ y $\theta = 2\pi/3$.

12. Dibuje el volumen de la región cortada de la esfera sólida $r \leq a$ por los medios planos $\phi = 0$ y $\phi = \pi/6$ en el primer octante.

13. Dibuje el volumen de la región más pequeña cortada de la esfera sólida $r \leq 2$ por el plano $z = 1$.

14. Dibuje el volumen del sólido encerrado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

15. Dibuje el volumen de la región limitada por el plano $z = 0$, lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y arriba por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

CAMPUS ENSENADA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA
TAREA V - CÁLCULO AVANZADO -

Prof: Dr. E. Efren García G.

1. Exhiba los valores de las funciones que se indican de las dos maneras siguientes: (a) trazando la superficie $z = f(x, y)$ y (b) dibujando un grupo de **curvas de nivel** en el dominio de la función. Marque cada curva de nivel con el valor correspondiente de la función.

   (a) $f(x, y) = y^2$
   (b) $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$
   (c) $f(x, y) = 1 - |x|$
   (d) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

Derivadas Parciales de primer orden

2. En los siguientes ejercicios encuentre $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

   (a) $f(x, y) = 2x^2 - 3y - 4$
   (b) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$
   (c) $f(x, y) = (x^2 - 1)(y + 2)$
   (d) $f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$
   (e) $f(x, y) = (x^3 + (y/2))^{3/2}$
   (f) $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$
   (g) $f(x, y) = (x + y)/(xy - 1)$
   (h) $f(x, y) = \arctan(x/y)$
   (i) $f(x, y) = e^{(x+y+1)}$
   (j) $f(x, y) = e^{-x}\sin(x + y)$
   (k) $f(x, y) = \ln(x + y)$
   (l) $f(x, y) = e^{xy}\ln y$
   (m) $f(x, y) = \cos^2(3x - y^2)$
   (n) $f(x, y) = x^y$
   (o) $f(x, y) = \log_y x$
   (p) $f(x, y) = \int_x^y g(t)dt$ (g continua para toda t)

(q) $f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n \;\; (|xy| < 1)$

(r) $f(x,y) = \sin^2(x - 3y)$

3. En los siguientes ejercicios encuentre f_x, f_y y f_z.

   (a) $f(x,y,z) = 1 + xy^2 - 2z^2$

   (b) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

   (c) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

   (d) $f(x,y,z) = \ln(x + 2y + 3z)$

   (e) $f(x,y,z) = yz\ln(xy)$

   (f) $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

   (g) $f(x,y,z) = \tanh(x + 2y + 3z)$

   (h) $f(x,y,z) = \sinh(xy - z^2)$

Derivadas parciales de segundo orden

4. En los ejercicios siguientes, verifique que $\omega_{xy} = \omega_{yx}$.

   (a) $\omega = \ln(2x + 3y)$

   (b) $\omega = e^x + x\text{ln}y + y\text{ln}x$

   (c) $\omega = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$

   (d) $\omega = x\sin y + y\sin x + xy$

5. Encuentre todas las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones.

   (a) $f(x,y) = x + y + xy$

   (b) $f(x,y) = \sin xy$

   (c) $g(x,y) = x^2y + \cos y + y\sin x$

   (d) $h(x,y) = xe^y + y + 1$

   (e) $r(x,y) = \ln(x + y)$

Ecuación de Laplace

6. La *ecuación tridimensional de Laplace* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ se satisface por distribuciones de temperatura en el espacio en estado estacionario $T = T(x,y,z)$, por potenciales gravitatorios y por potenciales electrostáticos. La *ecuación bidimensional de Lapalce* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, describe potenciales y distribuciones de temperaturas en estado estacionario en un plano. Demuestre que cada función de los siguientes ejercicios satisface una ecuación de Laplace.

   (a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

(b) $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$

(c) $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$

(d) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

(e) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

(f) $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos 5z$

Ecuación de onda

7. Si estamos en la playa de un océano y tomamos una fotografía de las olas, ésta mostrará un patrón regular de cimas y valles en un instante de tiempo. Vemos movimiento vertical periódico en el espacio, respecto a la distancia. Si nos metemos al agua, podemos sentir el subir y bajar del agua con forme pasan las olas. Vemos movimiento vertical periódico en el tiempo. En física, esta simetría se expresa por la ecuación de *onda unidimensional* $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, donde w es la altura de la ola, x es la variable distancia, t es la variable tiempo y c es la velocidad con que se propagan la olas. En nuestro ejemplo, x es la distancia a través de la superficie del océano, pero en otras aplicaciones x podría se la distancia a lo largo de una cuerda vibrante, la distancia a través del aire (ondas acústica) o distancia a través del espacio (ondas de luz). El número c varía con el medio y el tipo de onda.

   Demuestre que las funciones de los siguientes ejercicios, son todas solución de la ecuación de onda.

   (a) $w = \sin(x + ct)$

   (b) $w = \cos(2x + 2ct)$

   (c) $w = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$

   (d) $w = \ln(2x + 2ct)$

   (e) $w = \tan(2x - 2ct)$

   (f) $w = 5\cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$

Derivadas parciales en valores específicos

(a) Encuentre $\partial w/\partial r$ cuando $r = 1$, $s = -1$ si $w = (x + y + z)^2$, $x = r - s$, $y = \cos(r + s)$, $z = \sin(r + s)$.

(b) Encuentre $\partial w/\partial v$ cuando $u = -1$, $v = 2$ si $w = xy + \ln z$, $x = v^2/u$, $y = u + v$, $z = \cos u$.

• En los problemas, mostrar su procedimiento matemático y las gráficas correspondientes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

CAMPUS ENSENADA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO

INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA

TAREA VI - CÁLCULO AVANZADO -

Prof: Dr. E. Efren García G.

Derivadas direccionales

En los siguientes ejercicios, encuentre la derivada de la función en P_0 en la dirección de $\vec{A}$.

1. $f(x,y) = 2xy - 3y^2$, $P_0(5,5)$, $\vec{A} = 4\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath}$
2. $g(x,y) = x - (y^2/x) + \sqrt{3}\,\text{arcsec}(2xy)$, $P_0(1,1)$, $\vec{A} = 12\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath}$
3. $h(x,y) = \arctan(y/x) + \sqrt{3}\,\text{arcsec}(xy/2)$, $P_0(1,1)$, $\vec{A} = 3\,\hat{\imath} - 2\,\hat{\jmath}$
4. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $P_0(1,-1,2)$, $\vec{A} = 3\,\hat{\imath} + 6\,\hat{\jmath} - 2\,\hat{k}$
5. $g(x,y,z) = 3e^x \cos yz$, $P_0(0,0,0)$, $\vec{A} = 2\,\hat{\imath} + \,\hat{\jmath} - 2\,\hat{k}$

Direcciones de crecimiento y decrecimiento más rápido

En los siguientes ejercicios, encuentre las direcciones en que las funciones crecen y decrecen más rápidamente en P_0. Luego encuentre las derivadas de las funciones en esas direcciones.

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $P_0(-1,1)$
2. $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\sin y$, $P_0(1,0)$
3. $g(x,y,z) = xe^y + z^2$, $P_0(1,\ln 2,1/2)$
4. $f(x,y,z) = \ln xy + \ln yz + \ln xz$, $P_0(1,1,1)$
5. $h(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + y + 6z$, $P_0(1,1,0)$

Planos tangentes y rectas normales a superficies

En los siguientes ejercicios, encuentre ecuaciones para (a) el plano tangente y (b) la recta normal en el punto P_0 sobre la superficie dada.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $P_0(1,1,1)$
2. $2z - x^2 = 0$, $P_0(2,0,2)$
3. $\cos \pi x - x^2y + e^{xz} + yz = 4$, $P_0(0,1,2)$
4. $x^2 - xy - y^2 - z = 0$, $P_0(1,1,-1)$

5. $x+y+z+1$, $P_0(0,1,0)$

Miscelánea de problemas

1. En los siguientes ejercicios, ecuentre por dos formas diferentes las derivadas que se indican.

   (a) La $\frac{\partial z}{\partial u}$ y la $\frac{\partial z}{\partial v}$ cuando $u=1$ y $v=-2$ si $z=\ln\theta$ y $\theta=\sqrt{v+3}\,[\arctan u]$

   (b) La $\frac{\partial z}{\partial u}$ y la $\frac{\partial z}{\partial v}$ cuando $u=5$ y $v=4$ si $z=\ln\theta$ y $\theta=\sqrt{v+3}\,[\arccos u]$

   (c) La $\frac{\partial z}{\partial u}$ y la $\frac{\partial z}{\partial v}$ cuando $u=3$ y $v=-1$ si $z=\ln\beta$ y $\beta=\sqrt{v^2+2}\,[\sin u]$

2. Considere que $\Phi(x,y,z)=3x^2z-y^2z^3+4x^3y+2x-3y-5$.

   (a) Encuentre el valor de $\nabla\cdot\nabla\Phi$ en el punto $P_0(1,-1,1)$.

   (b) Encuentre el valor de $\nabla^2\Phi$ en el punto $P_0(1,-1,1)$.

3. Considere la superficie definida por: $z=2(x^2+y^2)\exp(-x^2-y^2)$ y que se muestra en la siguiente figura ($\exp(u)=e^u$).

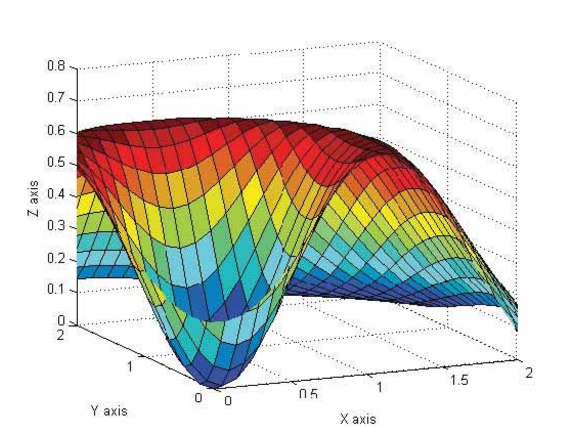


Figure 1: Sección de la superficie $z=2(x^2+y^2)\exp(-x^2-y^2)$

   (a) Encuentre el plano tangente sobre la superficie correspondiente al punto $P_0(1,1)$ del plano xy.

   (b) Evalue la derivada direccional $\mathfrak{D}\gamma$ de la función $z=z(x,y)$ en la dirección de $\overrightarrow{v}=2\,\hat{\imath}+\hat{\jmath}$.

4. Use la regla de la cadena para encontrar la derivada de $w=xy$ respecto a t a lo largo de la trayectoria $x=\cos t$, $y=\sin t$. ¿Cuál es el valor de la derivada en $t=\pi/2$?

5. Encuentre $d\omega/dt$ si

$$w=xy+z,\qquad x=\cos t,\qquad y=\sin t,\qquad z=t$$

¿Cuál es el valor de la derivada en $t = 0$?

6. Exprese $\partial\omega/\partial r$ y $\partial\omega/\partial s$ en términos de r y s si

$$w = x + 2y + z^2, \qquad x = r/s, \qquad y = r^2 + \ln s, \qquad z = 2r$$

7. Determine el GRADIENTE de los campos escalares siguientes:
   (a) $U = x^2 y + xyz$
   (b) $V = \rho z \sin\phi + z^2 \cos^2\phi + \rho^2$
   (c) $f = \cos\theta \sin\theta \ln r + r^2\phi$

8. Determine la DIVERGENCIA de los campos vectoriales siguientes:
   (a) $\vec{P} = x^2 yz\, \hat{a}_x + xz\, \hat{a}_z$
   (b) $\vec{Q} = \rho \sin\phi\, \hat{a}_\rho + \rho^2 z\, \hat{a}_\phi + z\cos\phi\, \hat{a}_z$
   (c) $\vec{T} = \frac{1}{r^2}\cos\theta\, \hat{a}_r + r\sin\theta\cos\phi\, \hat{a}_\theta + \cos\theta\, \hat{a}_\phi$

9. Determine la DIVERGENCIA de los campos vectoriales siguientes y evalúelos en los puntos especificados.
   (a) $\vec{A} = yz\, \hat{a}_x + 4xy\, \hat{a}_y + y\, \hat{a}_z$ en $(1, -2, 3)$
   (b) $\vec{B} = \rho z \sin\phi\, \hat{a}_\rho + 3\rho z^2 \cos\phi\, \hat{a}_\phi$ en $(5, \pi/2, 1)$
   (c) $\vec{C} = 2r\cos\theta\cos\phi\, \hat{a}_r + r^{1/2}\, \hat{a}_\phi$ en $(1, \pi/6, \pi/3)$

10. Determine el ROTACIONAL de los campos vectoriales siguientes:
   (a) $\vec{P} = x^2 yz\, \hat{a}_x + xz\, \hat{a}_z$
   (b) $\vec{Q} = \rho \sin\phi\, \hat{a}_\rho + \rho^2 z\, \hat{a}_\phi + z\cos\phi\, \hat{a}_z$
   (c) $\vec{T} = \frac{1}{r^2}\cos\theta\, \hat{a}_r + r\sin\theta\cos\phi\, \hat{a}_\theta + \cos\theta\, \hat{a}_\phi$

11. Determine el ROTACIONAL de los campos vectoriales del ejercicio (6.) y evalúelos en los puntos especificados.

12. If $f(x, y) = xy$, find the gradient vector $\nabla f(2, 3)$ and use it to find the tangent line to the level curve $f(x, y) = 6$ at the point $(3, 2)$. Sketch the level curve, the tangent line, and the gradient vector.

13. If $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, find the gradient vector $\nabla g(1, 2)$ and use it to find the tangent line to the level curve $g(x, y) = 1$ at the point $(1, 2)$. Sketch the level curve, the tangent line, and the gradient vector.

14. Show that the equation of the tangent plane to the ellipsoid $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ at the point (x_0, y_0, z_0) can be written as

$$\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} + \frac{zz_o}{c^2} = 1$$

15. Find the equation of the tangent plane to the hyperboloid $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ at (x_0, y_0, z_0) and express it a form similar to the one in Exercise 3.

16. Show that the equation of the tangent plane to the elliptic paraboloid $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$ at the point (x_0, y_0, z_0) can be written as

$$\frac{2xx_o}{a^2} + \frac{2yy_o}{b^2} = \frac{z+z_o}{c}$$

17. At what point on the paraboloid $y = x^2 + z^2$ is the tangent plane parallel to the plane $x + 2y + 3z = 1$?

18. Are there any points on the hyperboloid $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ where the tangent plane is parallel to the plane $z = x + y$?

19. Show that the ellipsoid $3x^2+2y^2+z^2 = 9$ and the sphere $x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z+24 = 0$ are tangent to each other at the point $(1, 1, 2)$. (This means that they have a common tangent plane at the point.)

20. Show that every plane that is tangent to the cone $x^2 + y^2 = z^2$ passes through the origin.

21. Find parametric equations for the tangent line to the curve of intersection of the paraboloid $z = x^2 + y^2$ and the ellipsoid $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ at the point $(-1, 1, 2)$.

• En cada problema, mostrar su procedimiento matemático y las gráficas correspondientes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
CAMPUS ENSENADA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA
TAREA VII - CÁLCULO AVANZADO -

Prof: Dr. E. Efren García G.

1. Aplique la regla de la cadena para hallar dz/dt o $d\omega/dt$.
   (a) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = e^t$
   (b) $z = \cos(x + 4y)$, $x = 5t^4$, $y = 1/t$
   (c) $x = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $x = \ln t$, $y = \cos t$
   (d) $z = \arctan(y/x)$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{-t}$
   (e) $\omega = xe^{y/z}$, $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$
   (f) $\omega = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \tan t$

2. Mediante la regla de la cadena encuentre $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.
   (a) $z = x^2y^3$, $x = s\cos t$, $y = s\sin t$
   (b) $z = \arcsin(x - y)$, $x = s^2 + t^2$, $y = 1 - 2st$
   (c) $z = \sin\theta\cos\phi$, $\theta = st^2$, $\phi = s^2t$
   (d) $z = e^{x+2y}$, $x = s/t$, $y = t/s$
   (e) $z = e^r\cos\theta$, $r = st$, $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$
   (f) $z = \tan(u/v)$, $u = 2s + 3t$, $v = 3s - 2t$

3. Si $z = f(x, y)$, donde f es diferenciable, $x = g(t)$, $y = h(t)$, $g(3) = 2$, $h(3) = 7$, $g'(3) = 5$, $h'(3) = -4$, $f_x(2, 7) = 6$ y $f_y(2, 7) = -8$. Determine dz/dt cuando $t = 3$.

4. Sea $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, donde F, u y v son diferenciables, $u(1, 0) = 2$, $v(1, 0) = 3$, $u_s(1, 0) = -2$, $v_s(1, 0) = 5$, $u_t(1, 0) = 6$, $v_t(1, 0) = 4$, $F_u(2, 3) = -1$ y $F_v(2, 3) = 10$. Determine $W_s(1, 0)$ y $W_t(1, 0)$.

5. Suponga que f es una función diferenciable de x y y, y que $g(u, v) = f(e^u + \sin v, e^u + \cos v)$. Mediante la tabla de valores calcule $g_u(0, 0)$ y $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
$(0,0)$	3	6	4	8
$(1,2)$	6	3	2	5

6. Suponga que f es una función diferenciable de x y y, y que $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Mediante la tabla de valores del ejercicio anterior calcule $g_r(1, 2)$ y $g_s(1, 2)$.

7. Use la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales que se indican.

   (a) Si $z = x^2 + xy^3$, $x = uv^2 + \omega^3$ y $y = u + ve^{\omega}$. Calcular: $\partial z/\partial u$, $\partial z/\partial v$ y $\partial z/\partial \omega$, cuando $u = 2$, $v = 1$ y $\omega = 0$.

   (b) Si $u = \sqrt{r^2 + s^2}$, $r = y + x\cos t$ y $s = x + y\sin t$. Calcular: $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ y $\partial u/\partial t$, cuando $x = 1$, $y = 2$ y $t = 0$.

   (c) Si $R = \ln(u^2 + v^2 + \omega^2)$, $u = x + 2y$, $v = 2x - y$ y $\omega = 2xy$. Calcular: $\partial R/\partial x$ y $\partial R/\partial y$, cuando $x = y = 1$.

   (d) Si $M = xe^{y-z^2}$, $x = 2uv$, $y = u - v$ y $z = u + v$. Calcular: $\partial M/\partial u$, $\partial M/\partial v$, cuando $u = 3$ y $v = -1$.

   (e) Si $u = x^2 + yz$, $x = pr\cos\theta$, $y = pr\sin\theta$ y $z = p + r$. Calcular: $\partial u/\partial p$, $\partial u/\partial r$ y $\partial u/\partial \theta$, cuando $p = 2$, $r = 3$ y $\theta = 0$.

   (f) Si $Y = \omega \arctan(uv)$, $u = r + s$, $v = s + t$ y $\omega = t + r$. Calcular: $\partial Y/\partial r$, $\partial Y/\partial s$ y $\partial Y/\partial t$, cuando $r = 1$, $s = 0$ y $t = 1$.

8. Encuentre dy/dx para las siguientes funciones en forma implícita.

   (a) $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

   (b) $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

   (c) $\cos(x - y) = xe^y$

   (d) $\sin x + \cos y = \sin x \cos y$

9. Encuentre $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ para las siguientes funciones en forma implícita.

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

   (b) $xyz = \cos(x + y + z)$

   (c) $x - z = \arctan(yz)$

   (d) $yz = ln(x + z)$

10. Si $u = f(x, y)$, donde $x = e^s\cos t$ y $y = e^s\sin t$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

• En los problemas, mostrar su procedimiento matemático y las gráficas correspondientes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
CAMPUS ENSENADA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA
TAREA VIII - CÁLCULO AVANZADO -

Prof: Dr. E. Efren García G.

COORDENADAS POLARES

1. Encuentre el área de la región cortada del primer octante por la curva $\rho = 2(2 - \sin 2\theta)^{1/2}$.
2. Encuentre el área de la región que se encuentra dentro de la cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$ y fuera del círculo $\rho = 1$.
3. Encuentre el área encerrada dentro de un pétalo de la rosa $\rho = 12\cos 3\theta$.
4. Encuentre el área de la región encerrada por el eje x positivo y la esprial $\rho = 4\theta/3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. La región parece la concha de un caracol.
5. Encuentre el área de la región cortada del primer cuadrante por la cardioide $\rho = 1 + \sin\theta$.
6. Encuentre el área de la región común a los interiores de las cardioides $\rho = 1 + \cos\theta$ y $\rho = 1 - \cos\theta$.

COORDENADAS CARTESIANAS

Encuentre los volúmenes de las regiones siguientes:

1. La región entre el cilindro $z = y^2$ y el plano xy, que está limitada por los planos $x = 1, y = -1, y = 1$.
2. La región en el primer octante limitada por los planos coordenados y los planos $x + z = 1$, $y + 2z = 2$.
3. La región en el primer octante limitada por los palnos coordenados, el plano $y + z = 2$ y el cilindro $x = 4 - y^2$.
4. La cuña cortada del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por los planos $z = -y$ y $z = 0$.
5. El tetraedro en el primer octante limi-tado por los planos coordenados y el plano $x + y/2 + z/3 = 1$.

1. Encuentre el volumen de la porción de la esfera sólida $r \leq a$ que se encuentra entre los conos $\theta = \pi/3$ y $\theta = 2\pi/3$.
2. Encuentre el volumen de la región cortada de la esfera sólida $r \leq a$ por los medios planos $\phi = 0$ y $\phi = \pi/6$ en el primer octante.
3. Encuentre el volumen de la región más pequeña cortada de la esfera sólida $r \leq 2$ por el plano $z = 1$.
4. Encuentre el volumen del sólido en-cerrado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.
5. Encuentre el volumen de la región li-mitada por el plano $z = 0$, lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y arriba por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

---

1. En los apartados a) y b), graficar y hallar el volumen de las esferas deformadas. *Estos sólidos se usan como modelos de tumores.*

   a) Esfera deformada:

   $\rho = 1 + 0.2sin(8\theta)sin(\phi)$
   $0 \leq \theta \leq 2\pi$
   $0 \leq \phi \leq \pi$

   b) Esfera deformada:

   $\rho = 1 + 0.2sin(8\theta)sin(4\phi)$
   $0 \leq \theta \leq 2\pi$
   $0 \leq \phi \leq \pi$

- En los problemas, mostrar su procedimiento matemático y las gráficas correspondientes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

CAMPUS ENSENADA
FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA

TAREA IX - CÁLCULO AVANZADO -

Dr. Enrique Efren García Guerrero.

1. Encuentre el área del casquete cortado del paraboloide $y^2+z^2=3x$, por el plano $x=1$.
2. Encuentre el área de la región elíptica cortada del plano $x+y+z=1$, por el cilindro $x^2+y^2=1$.
3. Encuentre el área del casquete cortado de la parte superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$, por el plano $z=\sqrt{2}/2$.
4. a) Encuentre el área de la superficie cortada del hemisferio $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geq 0$, por el cilindro $x^2+y^2=2x$.
b) Encuentre el área de la porción del cilindro que se encuentra dentro del hemisferio.
5. Encuentre el área cortada del paraboloide $x^2+y^2-z=0$ por el plano $z=2$.
6. Encuentre el área de la banda cortada del paraboloide $x^2+y^2-z=0$ por los planos $z=2$ y $z=6$.
7. Encuentre el área de la región cortada del plano $x+2y+2z=5$ por el cilindro cuyas paredes son $x=y^2$ y $x=2-y^2$.
8. Encuentre el área de la porción de la superficie $x^2-2z=0$ que se encuentra arriba del triángulo limitado por las rectas $x=\sqrt{3}$, $y=0$ y $y=x$ en el plano xy.
9. Encuentre el área de la superficie $x^2-2y-2z=0$ que se encuentra arriba del triángulo limitado por las rectas $x=2$, $y=0$ y $y=3x$ en el plano xy.
10. Encuentre el área del casquete cortado de la esfera $x^2+y^2+z^2=2$ por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
11. Encuentre el área de la elipse cortada del plano $z=cx$ por el cilindro $x^2+y^2=1$.
12. Encuentre el área de la porción superior del cilindro $x^2+z^2=1$ que se encuentra entre los planos $x=\pm 1/2$ y $y=\pm 1/2$.
13. Encuentre el área de la porción del paraboloide $x=4-y^2-z^2$ que se encuentra arriba del anillo $1 \leq y^2+z^2 \leq 4$ en el plano yz.
14. Encuentre el área de la superficie cortada del paraboloide $x^2+y+z^2=2$ por el plano $y=0$.

15. Encuentre el área de la superficie $x^2 - 2\ln x + \sqrt{15}y - z = 0$ arriba del cuadrado R : $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$, en el plano xy.

16. Encuentre el área de la superficie $2x^{3/2} + 2y^{3/2} - 3z = 0$ arriba del cuadrado R : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, en el plano xy.

17. Integre $g(x, y, z) = y + z$ sobre la superficie de la cuña en el primer octante limitada por los planos coordenados y los planos $x = 2$ y $y + z = 1$.

18. Integre $g(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + 4}$ sobre la superficie cortada del cilindro parabólico $y^2 + 4z = 16$ por los planos $x = 0$, $x = 1$ y $z = 0$.

Encuentre el flujo del campo $\vec{F}$ a través de la porción de la superficie dada en la dirección especificada.

19. $\vec{F}(x, y, z) = -\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 3\,\hat{k}$
S : superficie rectangular $z = 0$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, en dirección $\hat{k}$.

20. $\vec{F}(x, y, z) = yx^2\,\hat{\imath} - 2\,\hat{\jmath} + xz\,\hat{k}$
S : superficie rectangular $y = 0$, $= -1 \leq x \leq 2$, $2 \leq z \leq 7$, en dirección $-\hat{\jmath}$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

CAMPUS ENSENADA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO

INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA

TAREA X - CÁLCULO AVANZADO -

Prof: Dr. E. Efren García G.

1. En los siguientes ejercicios mostrar si las dos funciones vectoriales dadas definen: *a)* la misma curva orientada, *b)* curvas opuestas, *c)* una define un subarco o el opuesto de un subarco de la curva orientada definida por la otra, *d)* ninguna relacion entre ellas.

   (a) $\vec{f(t)} = t^2\,\hat{e}_1 + t^4\,\hat{e}_2$ para $0 \leq t \leq 1$ & $\vec{g(u)} = (\sin u)\,\hat{e}_1 + (\sin u)^2\,\hat{e}_2$ para $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$.

   (b) $\vec{f(t)} = \frac{t}{t+1}\,\hat{e}_1 + \frac{t+1}{t-1}\,\hat{e}_2$ para $2 \leq t \leq 4$ & $\vec{g(u)} = \frac{1}{u+1}\,\hat{e}_1 + \frac{1+u}{1-u}\,\hat{e}_2$ para $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{1}{2}$.

   (c) $\vec{f(t)} = [\ln(t-1)]\,\hat{e}_1 + \frac{1}{t-1}\,\hat{e}_2$ para $2 \leq t \leq 8$ & $\vec{g(u)} = 2(\ln u)\,\hat{e}_1 + u^{-2}\,\hat{e}_2$ para $1 \leq u \leq 2$.

   (d) $\vec{f(t)} = \frac{t}{t^2+1}\,\hat{e}_1 + t\,\hat{e}_2$ para $0 \leq t \leq 1$ & $\vec{g(u)} = u^2\,\hat{e}_1 + \frac{2u}{u+1}\,\hat{e}_2$ para $0 \leq u \leq 1$.

   (e) $\vec{f(t)} = (t^2+1)\,\hat{e}_1 + t^2\,\hat{e}_2$ para $0 \leq t \leq 2$ & $\vec{g(u)} = (\sec^2 u)\,\hat{e}_1 + (\sec^2 u - 1)\,\hat{e}_2$ para $0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}$.

   (f) $\vec{f(t)} = e^t\,\hat{e}_1 + t\,\hat{e}_2$ para $-1 \leq t \leq 0$ & $\vec{g(u)} = \frac{1}{u}\,\hat{e}_1 - (\ln u)\,\hat{e}_2$ para $1 \leq u \leq e$.

   (g) $\vec{f(t)} = \sqrt{t+1}\,\hat{e}_1 + (t+1)\,\hat{e}_2$ para $-1 \leq t \leq 3$ & $\vec{g(u)} = u\,\hat{e}_1 + u^2\,\hat{e}_2$ para $-2 \leq u \leq 2$.

   (h) $\vec{f(t)} = t^2\,\hat{e}_1 - \sqrt{t}\,\hat{e}_2$ para $0 \leq t \leq 1$ & $\vec{g(u)} = e^{-2u}\,\hat{e}_1 - e^{-u/2}\,\hat{e}_2$ para $0 \leq u \leq 1$.

2. En los siguientes ejercicios, calcular la longitud de la curva dada entre los límites indicados.

   (a) $\vec{f(t)} = (t^2 - 1, t^3)$ para $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$.

   (b) $\vec{f(t)} = (\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}(2t+1)^{\frac{3}{2}})$ para $0 \leq t \leq 1$.

   (c) $\vec{f(t)} = (\frac{1}{6}t^6, \frac{1}{4}t^4)$ para $1 \leq t \leq \sqrt[4]{5}$.

   (d) $\vec{f(t)} = (2e^{t/2}, 4e^{3t/4})$ para $0 \leq t \leq 2$.

(e) $\vec{f(t)} = (\frac{1}{3}\cos^3 t, \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t)$ para $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

(f) $\vec{f(t)} = (\sin t, \sin^{3/2} t)$ para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

3. Evalúe $\int_\varsigma (x+y)dl$ donde ς es el segmento de recta $x = t$, $y = (1-t)$, $z = 0$, de $(0,1,0)$ a $(1,0,0)$.

4. Evalúe $\int_\varsigma (x - y + z - 2)dl$ donde ς es el segmento de recta $x = t$, $y = (1-t)$, $z = 1$, de $(0,1,1)$ a $(1,0,1)$.

5. Evalúe $\int_\varsigma (xy + y + z)dl$ a lo largo de la curva $\vec{r}(t) = 2t\,\hat{\imath} + t\,\hat{\jmath} + (2-2t)\,\hat{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

6. Evalúe $\int_\varsigma \sqrt{x^2+z^2}dl$ a lo largo de la curva $\vec{r}(t) = (4\cos t)\,\hat{\imath} + (4\sin t)\,\hat{\jmath} + 3t\,\hat{k}$, $-2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$.

7. Encuentre la integral de línea de $f(x,y,z) = x + y + z$ sobre el segmento de recta de $(1,2,3)$ a $(0,-1,1)$.

8. Encuentre la integral de línea de $f(x,y,z) = \sqrt{3}/(x^2+y^2+z^2)$ sobre la curva $\vec{r}(t) = t\,\hat{\imath} + t\,\hat{\jmath} + t\,\hat{k}$, $1 \leqslant t \leqslant \infty$.

9. Integre $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ sobre la trayectoria de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$ dada por:
$C_1 : \vec{r}(t) = t\,\hat{\imath} + t^2\,\hat{\jmath}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$
$C_2 : \vec{r}(t) = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ y que se representan en la figura 1.

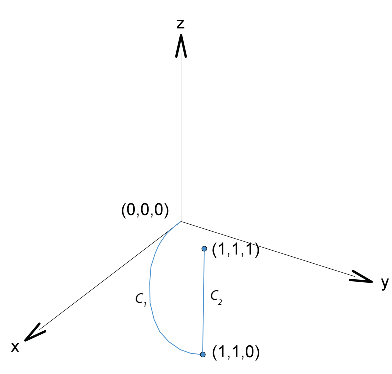


FIG. 1: Trayectoria de integración

10. Evalúe $\int_{\varsigma}(y^2\,dx + x\,dy)$ donde (a) $\varsigma = \varsigma_1$ es el segmento rectilíneo desde $(-5,-3)$ a $(0,2)$ y (b) si $\varsigma = \varsigma_2$ es el arco de parábola $x = 4 - y^2$ desde $(-5,-3)$ a $(0,2)$, como se muestra en la figura 2.

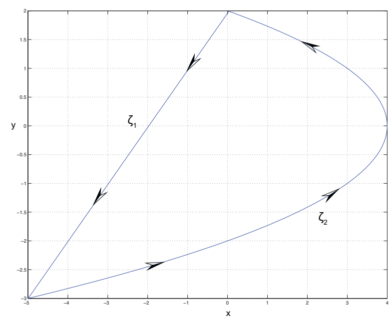


FIG. 2: Trayectoria ς formada por dos segmentos

11. Calcule la circulación de $\vec{A} = \rho\,\hat{a}_\rho + z\sin\phi\,\hat{a}_\phi$, alrededor de la curva L representada en la figura 3.

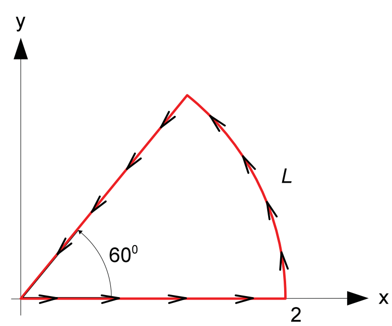


FIG. 3: Trayectoria L

12. Para cada fuerza $\vec{F}$ dada, encuentre el trabajo realizado del punto $P_0(0,0,0)$ al punto $P_1(1,1,1)$, sobre cada una de las siguientes trayectorias:

- La trayectoria en línea recta C_1: $\vec{r}(t) = t\,\hat{\imath} + t\,\hat{\jmath} + t\,\hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$

- La trayectoria curva C_2: $\vec{r}(t) = t\,\hat{\imath} + t^2\,\hat{\jmath} + t^4\,\hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$

- La trayectoria $C_3 \cup C_4$ que consiste en el segmento de recta de $(0,0,0)$ a $(1,1,0)$ seguido del segmento de $(1,1,0)$ a $(1,1,1)$.

(a) $\vec{F} = 3y\,\hat{\imath} + 2x\,\hat{\jmath} + 4z\,\hat{k}$

(b) $\vec{F} = [1/(x^2+1)]\,\hat{\jmath}$

(c) $\vec{F} = \sqrt{z}\,\hat{\imath} - 2x\,\hat{\jmath} + \sqrt{y}\,\hat{k}$

(d) $\vec{F} = xy\,\hat{\imath} + yz\,\hat{\jmath} + xz\,\hat{k}$

(e) $\vec{F} = (3x^2 - 3x)\,\hat{\imath} + 3z\,\hat{\jmath} + \,\hat{k}$

(f) $\vec{F} = (y+z)\,\hat{\imath} + (z+x)\,\hat{\jmath} + (x+y)\,\hat{k}$

13. Evalúe $\int_c \vec{F} \cdot \hat{T}\vec{dl}$ para el campo vectorial $\vec{F} = x^2\,\hat{\imath} - y\,\hat{\jmath}$ a lo largo de la curva $x = y^2$ de $(4,2)$ a $(1,-1)$.

14. Evalúe $\int_c \vec{F} \cdot \vec{dr}$ para el campo vectorial $\vec{F} = y\,\hat{\imath} - x\,\hat{\jmath}$ en sentido antihorario a lo largo del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ de $(1,0)$ a $(0,1)$.

15. Encuentre la circulación y el flujo de los campos

$$\vec{F}_1 = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} \quad \text{y} \quad \vec{F}_2 = -y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath}$$

alrededor y a través de cada una de las siguientes curvas.

a) El círculo $\vec{r}(t) = (\cos t)\,\hat{\imath} + (\sin t)\,\hat{\jmath}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

b) La elipse $\vec{r}(t) = (\cos t)\,\hat{\imath} + (4\sin t)\,\hat{\jmath}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

16. Encuentre el flujo de los campos

$$\vec{F}_1 = 2x\,\hat{\imath} - 3y\,\hat{\jmath} \quad \text{y} \quad \vec{F}_2 = 2x\,\hat{\imath} + (x-y)\,\hat{\jmath}$$

a través del círculo

$$\vec{r}(t) = (a\cos t)\,\hat{\imath} + (a\sin t)\,\hat{\jmath}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

17. Encuentre la circulación y el flujo del campo $\vec{F}$, alrededor y a través de la trayectoria semicircular cerrada que consiste en el arco semicircular $\vec{r_1}(t) = (a\cos t)\,\hat{\imath} + (a\sin t)\,\hat{\jmath}$, $0 \le t \le \pi$, seguido por el segmento de recta $\vec{r_2}(t) = t\,\hat{\imath}, \quad -a \le t \le a.$

(a) $\vec{F} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$

(b) $\vec{F} = x^2\,\hat{\imath} + y^2\,\hat{\jmath}$

(c) $\vec{F} = -y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath}$

(d) $\vec{F} = -y^2\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath}$

18. Evalúe la integral de flujo del campo de velocidades $\vec{F} = (x + y)\,\hat{\imath} - (x^2 + y^2)\,\hat{\jmath}$ a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$ en el plano xy.

a) La mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = 1$.

b) El segmento de recta de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.

c) El segmento de recta de $(1, 0)$ a $(0, -1)$ seguido por el segmento de recta de $(0, -1)$ a $(-1, 0)$.

19. Encuentre el flujo hacia afuera del campo de velocidades $\vec{F} = (x + y)\,\hat{\imath} - (x^2 + y^2)\,\hat{\jmath}$, a través del triángulo con vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$.

20. Encuentre la circulación de $\vec{F} = 2x\,\hat{\imath} + 2z\,\hat{\jmath} + 2y\,\hat{k}$ alrededor de la trayectoria cerrada que consiste en las siguientes tres curvas recorridas en la dirección de t creciente:

C_1: $\quad \vec{r}(t) = (\cos t)\,\hat{\imath} + (\sin t)\,\hat{\jmath} + t\,\hat{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$

C_2: $\quad \vec{r}(t) = \hat{\jmath} + (\pi/2)(1 - t)\,\hat{k}, \quad 0 \le t \le 1.$

C_3: $\quad \vec{r}(t) = t\,\hat{\imath} + (1 - t)\,\hat{\jmath}, \quad 0 \le t \le 1.$